数理解析研究所講究録
1028 巻 1998 年 67-78

特性指数が正整数値を取る非線型特異1階偏微分方程式 [1]

山根英司 (Hideshi Yamane) [2]

Abstract

次の形の偏微分方程式を考える：
$\big(tD_t - \rho(x)\big)u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_t u, u, D_1 u, \ldots, D_n u)$。

R.Gérard と田原秀敏の研究によると, もし特性指数 $\rho(x)$ が正整数値を取らないならば $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解がただ一つ存在する。この論説では, $x=0$ において $\rho(x)$ が正整数値を取る場合について調べる。

解 $u(t,x)$ は解析的集合 $\{t=0,\ \rho(x) \in \mathbf{N}^*\}$, $\mathbf{N}^* = \{1,2,\ldots\}$, に沿って特異性を持つが, この近くでの解の存在範囲について考える。

§1. イントロダクション

次のタイプの非線型特異1階偏微分方程式について調べる：

$$(tD_t - \rho(x))\,u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_t u, u, D_1 u, \ldots, D_n u)。 \tag{1}$$

ここで $(t,x) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}^n_x$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $D_t = \partial/\partial t$, $D_i = \partial/\partial x_i$。また, $\rho(x)$ と $a(x)$ は, $\mathbf{C}^n_x$ の原点を中心とする多重円盤 D で定義された正則関数。また, G_2 は

$$G_2(x)(t, z, X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sum_{p+q+|\alpha|\geq 2} a_{pq\alpha}(x) t^p z^q X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n,$$

の形の巾級数展開を持つとする。ここで $a_{pq\alpha}(x)$ は D で正則であり,
$\sum_{p+q+|\alpha|\geq 2} \sup_{x\in D} |a_{pq\alpha}(x)| t^p z^q X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$ は $(t, z, X_0, \ldots, X_n)$ の収束巾級数とする。

さて局所正則解 $u(t,x)$ であって, 条件 $u(0,x) \equiv 0$ を満たすものを探そう。(1) の左辺はこの条件のおかげで well-defined になる。

次の定理は [1] で証明されている。

定理 1 (Gérard-田原) $\mathring{x} \neq 0$ を D の一つの点とする。もし $\rho(\mathring{x}) \notin \mathbf{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$ ならば, 方程式 (1) は $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解 $u(t,x)$ を $(0,\mathring{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}^n_x$ の近傍でただ一つ持つ。

この定理を踏まえて, $\rho(\mathring{x})$ が正整数値を取る場合に何が起きるかを調べよう。

まず [1] の計算を説明する。

$$u(t,x) = \sum_{m\geq 1} u_m(x) t^m \tag{2}$$

---

[1] この場合、「特異」は「フックス型」と言い換えてもよい。

[2] 275 千葉県習志野市芝園2-1-1 千葉工業大学数学教室　　yamane@cc.it-chiba.ac.jp

1991 Mathematics Subject Classifications: 35A20

と置いて形式解を求めるというのが方針である。 $\{u_m(x)\}$ について次が成り立つ：

$$u_1(x) = \frac{a(x)}{1-\rho(x)}, \tag{3}$$

であり, $m \geq 2$ のときは

$$\begin{aligned}&\big(m-\rho(x)\big)u_m(x)\\ &= f_m\Big(u_1(x), 2u_2(x), \ldots (m-1)u_{m-1}(x), u_1(x), \ldots, u_{m-1}(x),\\ &\qquad D_1u_1, \ldots, D_nu_1, \ldots, D_1u_{m-1}, \ldots, D_nu_{m-1}, \{a_{pq\alpha}(x)\}_{p+q+|\alpha|\leq m}\Big)。\end{aligned} \tag{4}$$

ここで f_m は多項式で, どの係数も 1 である。

仮定 $\rho(\mathring{x}) \notin \mathbf{N}^*$ により, $u_m(x)$ たちは全ての m に関して, $\mathbf{C}_x^n$ の原点の共通の近傍で正則となる。一方, もし$\rho(\mathring{x}) \in \mathbf{N}^*$ ならば, generic にはある m に関して, $u_m(x)$ は $x = \mathring{x}$ で特異性を持つ。そうであれば, $(0, \mathring{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ のどんなに小さい近傍においても $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解は存在しない。このような状況について調べようというのである。

例 方程式

$$\big(tD_t - (1-x^g)\big)u = tx^h + G_2(x)(t, tD_tu, u, D_1u, \ldots, D_nu), \quad g, h \in \mathbf{N}^*,$$

は $g \leq h$ のときそのときに限り, （一意な）正則解 $u(t,x) = \sum_{m\geq 1} u_m(x)t^m$ を持つ。

注意 上の例で示されるように, $\rho(0) \in \mathbf{N}^*$ であっても (3) と (4) で定められる $u_m(x)$ が全て正則になることがある。このような場合に $u(t,x) = \sum_{m\geq 1} u_m(x)$ は原点の十分近くで収束することが [1] で証明されている。

次の仮定を置く：

$$\rho(0) \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad \rho(x) \not\equiv \rho(0)。 \tag{5}$$

この仮定のもとで, 集合 $V = \{\rho(x) = \rho(0)\} \subset \mathbf{C}_x^n$ は余次元 1 の解析的集合である。方程式(1) は V の外で $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解をただ一つ持つが, V の点の近傍では generic にはそのような解は存在しない。

さて,

$$d(x) = \mathrm{dist}(x, V \cup \partial D) = \mathrm{dist}(x, V)$$

と置こう。ここで $\mathrm{dist}(x, Z)$ は x から $Z \subset \mathbf{C}_x^n$ までの距離を表わすものとする。 第 2 の等号は x が原点に十分近ければ成り立つ。

解 $u(t,x)$ は次の形の開集合において正則である：

$$|t| < Cd(x)^p, \quad x \text{ は原点に十分近い。}$$

ここで p と C は正定数である。 p は $\rho(x)$ だけで決まり，他のもの，例えばG_2 などにはよらない。詳しいことは後で述べる。

$\rho(x)-\rho(0)$ が $x=0$ においてちょうど g 位のゼロを持つとすると，次の評価が成り立つ：

$$\left|\frac{1}{\rho(x)-\rho(0)}\right| \leq C'd(x)^{-g}。 \tag{6}$$

ここで C' は正定数。証明は付録で与える。

主定理を述べよう。

定理 2 (主定理)

(i) もし $\rho(0) \geq g+2$ ならば, $u(0,x) \equiv 0$ を満たす (1) の解 $u(t,x)$ は

$$|t| < Cd(x), \quad x \text{ は原点に十分近い},$$

の形の領域で正則である。

(ii) もし $\rho(0) < g+2$ ならば, $u(0,x) \equiv 0$ を満たす (1) の解 $u(t,x)$ は

$$|t| < Cd(x)^{\frac{g+2}{\rho(0)}}, \quad x \text{ は原点に十分近い},$$

の形の領域で正則である。

どちらの場合でも C は $\rho(x)$, $a(x)$ と $G_2(t,z,X_0,X_1,\ldots,X_n)$ で定まる正定数である。

§2. 主定理の証明

解 $u(t,x)$ を t の巾級数の形で表わそう：

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m。$$

そうすると $\{u_m(x)\}$ は次の漸化式を満たす：

$$u_1(x) = \frac{a(x)}{1-\rho(x)}, \tag{7}$$

$m \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} &\big(m-\rho(x)\big)u_m(x) \\ &= f_m\Big(u_1(x), 2u_2(x), \ldots (m-1)u_{m-1}(x), u_1(x), \ldots, u_{m-1}(x), \\ &\qquad D_1u_1, \ldots, D_nu_1, \ldots, D_1u_{m-1}, \ldots, D_nu_{m-1}, \{a_{pq\alpha}(x)\}_{p+q+|\alpha|\leq m}\Big)。 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで f_m は多項式で全ての係数が 1 である。$\rho(0) = M \in \mathbf{N}^* = \{1,2,\ldots\}$ と置くと, generic には$u_m(x)\,(m \geq M)$ は $V = \{x \in \mathbf{C}^n; \rho(x) = M\}$ に沿って特異性を持つ。次の形の評価が成り立つことは簡単に示せる：

原点の共通の近傍で,

$$|u_m(x)| \le C_m d(x)^{-s_m} \quad (m \ge M)。 \tag{9}$$

ここで C_m は正定数であり, $s_m\,(m \ge M)$ は正整数である。明らかに $s_M = g$ と置いてよい。(始めの $M-1$ 項, すなわち $s_1, \dots, s_{M-1}$ の決め方はあとで説明する。ちょっとテクニカルな決め方をする。)

命題 1 もし $M \ge g+2$ ならば $s_m = m+g-M \quad (m \ge M)$ としてよい。

もし $M < g+2$ ならば $s_{\ell M+k} = \ell(g+2)+k-2 \quad (\ell \ge 1,\, 0 \le k \le M-1)$ としてよい。

証明 明らかに次の評価が成り立つ。

$$|D_k u_m(x)| \le C'_m d(x)^{-(s_m+1)}, \quad m \ge M,\ k=1,\dots,n。 \tag{10}$$

ここで C'_m は正定数である。したがって, $m \ge M+1$ に対して

$$\begin{aligned} s_m = \max\Big[&\{s_{m_1}+1\,;\,1 \le m_1 \le m-1\} \\ &\cup \{\sum_{j'=1}^{j}(s_{m_{j'}}+1)\,;\ 2 \le j \le m,\ m_{j'} \ge 1\,(1 \le j' \le j),\ \sum_{j'=1}^{j} m_{j'} \le m\}\Big]。 \end{aligned} \tag{11}$$

ここで $s_m = -1\,(1 \le m \le M-1)$ と置く。こういうテクニカルな置き方をするのは, 例外的な場合, すなわち $m = 1, \dots, M-1$ を扱うためである。これらの場合は u_m は正則であり, u_m とその導関数は有界であるから, (10) のような評価はいらない。実際+1 という項は $u_m(m \ge M)$ が特異だから必要になったのだった。$s_{m_1}+1$ という量は G_2 の項のうちで $u_1, \dots, u_{m-1}$, $D_1u_1, \dots$, D_nu_1, $\dots$, $D_1u_{m-1}, \dots, D_nu_{m-1}$ について 1 次の項から来ている。 また, $\sum_{j'=1}^{j}(s_{m_{j'}}+1)$ は G_2 の項のうちで $u_1, \dots, u_{m-1}$, $D_1u_1, \dots, D_nu_1$, $\dots$, $D_1u_{m-1}, \dots, D_nu_{m-1}$ に関して j 次の項から来ている。

(11) を多少簡単にできる。$s_m \ge s_{m-1}+1$ $(m \ge M+1)$ が (11) からすぐに従うので, $s_m \ge s_{m-1}\,(m \ge 2)$ が成り立つ。したがって

$$s_m = \max\Big[\{s_{m-1}+1\} \cup \{\sum_{j'=1}^{j}(s_{m_{j'}}+1)\,;\ \ 2 \le j \le m,\ m_{j'} \ge 1\,(1 \le j' \le j),\ \sum_{j'=1}^{j} m_{j'} = m\}\Big]$$

となる。さらに

$$\{s_{m-1}+1\} \subset \{(s_{m_1}+1)+(s_{m_2}+1);\quad m_1 \ge 1,\, m_2 \ge 1,\, m_1+m_2 = m\}$$

を用いると次が分かる：

$$s_m = \max_{j=2,\dots,m}\left\{\sum_{j'=1}^{j}(s_{m_{j'}}+1)\,;\, m_1 \ge 1, \dots, m_j \ge 1, \sum_{j'=1}^{j} m_{j'} = m\right\}。 \tag{12}$$

さて $M \ge g+2$ の場合を m に関する帰納法で証明しよう。示すべき式は明らかに $m \le M$ のときには成り立つ。$m \ge M+1$ として, 示すべき式が $s_1, \dots, s_{m-1}$ に対して成り立つと仮定しよう。このとき

$$s_{m-1}+1 = \{(m-1)+g-M\}+1 = m+g-M。$$

$s_{m-1}+1$ が (12) の右辺における最大値を与えることを示せば証明が終わる。それには次の不等式を使う：

$$\begin{aligned} &\sum_{j'=1}^{j}(s_{m_{j'}}+1) \le \sum_{j'\in A} m_{j'} + (\mathrm{card}A)(g-M+1), \qquad (13)\\ &A \overset{\mathrm{def}}{=} \{j'\,;\, m_{j'} \ge M\} \subset \{1,\ldots,j\}。\end{aligned}$$

もし $A=\emptyset$ ならば, $\sum_{j'=1}^{j}(s_{m_{j'}}+1)=0\le m+g-M$ である。ここで最後の不等式は $m\ge M+1$ という仮定から出る。

次にもし $\mathrm{card}A=1$ ならば, $m_{j'}\ge 1$ が各 $m_{j'}$ に対して成り立つから,

$$\sum_{j'\in A} m_{j'} \le m - \mathrm{card}A^c = m-j+1$$

となる。ここで, $A^c=\{1,2,\ldots,j\}\backslash A$ という記号を用いた。よって (13) と $j\ge 2$ より,

$$\begin{aligned} \sum_{j'=1}^{j}(s_{m_{j'}}+1) &\le m-j+1+(g-M+1)\\ &= m+g-M-j+2\\ &\le m+g-M。\end{aligned}$$

最後にもし $\mathrm{card}A\ge 2$ ならば, $g-M\le -2$ より

$$\begin{aligned} \sum_{j'\in A} m_{j'} + (\mathrm{card}A)(g-M+1) &\le m+2(g-M+1)\\ &\le m+g-M。\end{aligned}$$

これで $M\ge g+2$ の場合の証明が出来た。

次に $M<g+2$ の場合を証明しよう。まず $\ell=1$ と仮定する。 $k=0$ の場合は明らかに成り立つ。容易に分かるように $s_m=s_{m-1}+1$, $M+1\le m\le 2M-1$。よって $\ell=1$ の場合が示された。

さて,示したい式が $s_1,s_2,\ldots,s_{\ell M+k-1}$ ($\ell\ge 2$, $0\le k\le M-1$) に関して成り立つと仮定しよう。そうすると

$$\begin{aligned} (s_{(\ell-1)M}+1)+(s_{M+k}+1) &= \{(\ell-1)(g+2)-1\}+\{(g+2)+k-1\}\\ &= \ell(g+2)+k-2。\end{aligned}$$

これが (12) の右辺の最大値を与えることを証明しよう。もし $\ell_1+\cdots+\ell_j=\ell-\ell'$, $k_1+\cdots+k_j=M\ell'+k$ ならば,

$$\begin{aligned} (s_{\ell_1 M+k_1}+1)+\cdots+(s_{\ell_j M+k_j}+1) &= \sum_{j'\in A}\{\ell_{j'}(g+2)+k_{j'}-1\}\\ &= (g+2)\sum_{j'\in A}\ell_{j'}+\sum_{j'\in A}k_{j'}-\mathrm{card}A \end{aligned}$$

である。ただし $A=\{j';\ell_{j'}\geq 1\}\subset\{1,2,\dots,j\}$ と置いた。ここで $\sum_{j'\in A}\ell_{j'}=\sum_{j'=1}^{j}\ell_{j'}=\ell-\ell'$ であることと $\ell_{j'}=0$ から $k_{j'}\geq 1$ が従うこととに注意しよう。もし $A=\emptyset$ ならば，右辺は $0\leq\ell(g+2)+k-2$ に等しく，主張は正しい。

次にもし $A\neq\emptyset$ ならば，

$$\begin{aligned}&(s_{\ell_1M+k_1}+1)+\cdots+(s_{\ell_jM+k_j}+1)\\=\;&(\ell-\ell')(g+2)+\sum_{j'\in A}k_{j'}-\mathrm{card}A\end{aligned}\tag{14}$$

である。

右辺第２項を評価しよう。もし $j'\notin A$ ならば $\ell_{j'}=0$ かつ $k_{j'}\geq 1$ である。よって

$$\begin{aligned}\sum_{j'\in A}k_{j'}&=(M\ell'+k)-\sum_{j'\notin A}k_{j'}\\&\leq(M\ell'+k)-\mathrm{card}A^c\\&=(M\ell'+k)-(j-\mathrm{card}\ A)\end{aligned}\tag{15}$$

となる。(14) と (15) を組み合わせて，

$$\begin{aligned}&(s_{\ell_1M+k_1}+1)+\cdots+(s_{\ell_jM+k_j}+1)\\\leq\;&(\ell-\ell')(g+2)+(M\ell'+k)-j\\=\;&\ell(g+2)+\ell'\{-(g+2)+M\}+k-j\\\leq\;&\ell(g+2)+k-j\\\leq\;&\ell(g+2)+k-2。\end{aligned}$$

こうして，$s_{\ell M+k}=\ell(g+2)+k-2$ が示された。 □

後で次の補題を使う：

補題 1 Ω を $\mathbf{C}^n_x$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, の領域とし，Ω の正則関数 $u(x)$ が 次の評価を満たすとする：

$$|u(x)|\leq\frac{C(r)}{r^a},\quad a\in\mathbf{N}=\{0,1,2,\dots\}。$$

ここで $r=\mathrm{dist}(x;\partial\Omega)$ は点 x から Ω の境界 $\partial\Omega$ までの距離であり，$C(r)$ は r の高々 a 次の多項式で，係数は非負とする。このとき

$$|D_iu(x)|\leq\frac{e(a+1)C(r)}{r^{a+1}},\quad i=1,\dots,n。$$

証明 一般性を失うことなく，$i=1$ と仮定できる。グルサの公式より，

$$D_1u(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_\Gamma\frac{u(y,x_2,\dots,x_n)}{(x_1-y)^2}dy。$$

ここで $\Gamma=\{|y-x_1|=\frac{1}{a+1}r\}\subset \mathbf{C}_y$ である。

$$y\in\Gamma \text{のとき}\quad \mathrm{dist}\,((y,x_2,\dots,x_n);\partial\Omega)\ge r-\frac{r}{a+1}=\frac{a}{a+1}r$$

だから, $C(r)=\sum_{j=0}^{a}C_j r^j$ と書くと,

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\Gamma}|u(y,x_2,\dots,x_n)| &\le \sum_{j=0}^{a}C_j\left(\frac{a}{a+1}r\right)^{j-a}\\ &\le \left(\frac{a}{a+1}\right)^{-a}\sum_{j=0}^{a}C_j r^{j-a}\le e\frac{C(r)}{r^a}\text{。}\end{aligned}$$

こうして次の評価を得る：

$$\begin{aligned}|D_1u(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\frac{r}{a+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{a+1}r\right)^2}\cdot e\frac{C(r)}{r^a}\\ &= \frac{e(a+1)C(r)}{r^{a+1}}\text{。}\end{aligned}$$

□

主定理の証明に戻る。

原点の十分近くで,次の評価が成り立つと仮定してよい：

$$\begin{aligned}&|ju_j(x)|\le A,\quad |D_iu_j(x)|\le A,\qquad (j=1,\dots,M-1,\ i=1,\dots,n),\\ &|u_M(x)|\le Ad(x)^{-g},\quad |D_iu_M(x)|\le Ad(x)^{-(g+1)},\qquad (i=1,\dots,n),\\ &\frac{s_m+1}{Nm}\le 1\ (m\ge M),\quad |m-\rho(x)|\ge N\sigma m\ (m\ge M+1),\\ &|a_{pq\alpha}(x)|\le A_{pq\alpha}\text{。}\end{aligned}$$

ここで A,N,σ と $A_{pq\alpha}$ は正定数で, $\sum_{p+q+|\alpha|\ge 2}A_{pq\alpha}t^pz^qX_0^{\alpha_0}X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ は収束巾級数である。

次の解析的方程式を考える($d>0$ はパラメータ)：

$$\begin{aligned}\sigma Y &= \sigma(At+At^2+\cdots+At^{M-1}+\frac{A}{d^{g+1}}t^M)\\ &\quad+\frac{1}{d}\sum_{p+q+|\alpha|\ge 2}A_{pq\alpha}t^pY^qY^{\alpha_0}(eY)^{\alpha_1}\cdots(eY)^{\alpha_n}\\ &\quad-\frac{1}{d}\sum_{m=2}^{M}B_mt^m\text{。}\end{aligned}$$

ここで B_m は次の恒等式に現れる係数である：

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{\infty}B_mt^m &= \sum_{p+q+|\alpha|\ge 2}A_{pq\alpha}e^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}t^p(At+At^2+\cdots+At^{M-1})^{q+|\alpha|},\\ &\qquad |\alpha|=\alpha_0+(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\text{。}\end{aligned}$$

陰関数定理により上記の方程式は

$$Y = \sum_{m\geq 1} Y_m(d)t^m$$

の形の正則解 Y をただ一つ持つ。ここで $Y_m(d)$ は次のように求められる：

$$Y_1 = \cdots = Y_{M-1} = A, \quad Y_M = \frac{A}{d^{g+1}}。$$

$m \geq M+1$ については,

$$\sigma Y_m = \frac{1}{d} F_m \left(Y_1, \ldots, Y_{m-1}; eY_1, \ldots, eY_{m-1}; \{A_{pq\alpha}\}_{p+q+|\alpha|\leq m}\right)。$$

ここで F_m は正係数の多項式である。

容易に分かるように $Y_m(d)$ は

$$Y_m(d) = \frac{C_m(d)}{d^{t_m}}$$

の形である。ここで C_m は高々 t_m 次の多項式で係数は非負である。また $t_m = 0\,(1 \leq m \leq M-1)$, $\quad t_M = g+1\,(m \geq M+1)$ であり,

$$\begin{aligned} t_m = 1 + \max\Big[&\{t_{m_1}\,;\,1 \leq m_1 \leq m-1\} \\ &\cup \{\sum_{j'=1}^{j} t_{m_{j'}}\,;\,2 \leq j \leq m, m_{j'} \geq 1\,(1 \leq j' \leq j), \sum_{j'=1}^{j} m_{j'} \leq m\}\Big]。\end{aligned} \tag{16}$$

明らかに $t_m = s_m + 1\,(m \geq 1)$。 よって

$$\begin{array}{llcl} M \geq g+2 \text{ のとき} & t_m & = & m+g-M+1\ (m \geq M) \\ M < g+2 \text{ のとき} & t_{\ell M+k} & = & \ell(g+2)+k-1\ (\ell \geq 1,\ 0 \leq k \leq M-1)。\end{array}$$

$d = d(x)$ ならば Y が u の優級数であることを示そう。より詳しくいうと, $m \geq 1$ に対して

$$|u_m(x)| \leq |mu_m(x)| \leq Y_m(d), \tag{17}$$

$$|D_i u_m(x)| \leq eY_m(d), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{18}$$

を示そう。

$m = 1, 2, \ldots, M$ の場合は明らかに正しい。

残りは m に関する帰納法で示す。$u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ については上記の不等式が成り立つと仮定する。そうすると

$$\begin{aligned} &|u_m(x)| \\ \leq\ & \frac{1}{|m-\rho(x)|} f_m\Big(|u_1|, 2|u_2|, \ldots, (m-1)|u_{m-1}|, |u_1|, |u_2|, \ldots |u_{m-1}|, \\ &\qquad |D_1u_1|, \ldots, |D_nu_1|, \ldots, |D_1u_{m-1}|, \ldots, |D_nu_{m-1}|; \{|a_{pq\alpha}|\}_{p+q+\alpha\leq m}\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{N\sigma m} f_m\Big(|u_1|, 2|u_2|, \ldots, (m-1)|u_{m-1}|, |u_1|, |u_2|, \ldots |u_{m-1}|, \\
&\qquad\qquad |D_1 u_1|, \ldots, |D_n u_1|, \ldots, |D_1 u_{m-1}|, \ldots, |D_n u_{m-1}|; \{|a_{pq\alpha}|\}_{p+q+\alpha\leq m}\Big) \\
&\leq \frac{1}{N\sigma m} f_m\Big(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, \\
&\qquad\qquad eY_1, \ldots, eY_1, , \ldots, eY_{m-1}, \ldots, eY_{m-1}; \{A_{pq\alpha}\}_{p+q+\alpha\leq m}\Big) \\
&= \frac{1}{N\sigma m} F_m\Big(Y_1, \ldots, Y_{m-1}, eY_1, \ldots, eY_{m-1}; \{A_{pq\alpha}\}_{p+q+\alpha\leq m}\Big) \\
&= \frac{1}{N\sigma m} \cdot \sigma d Y_m(d) = \frac{d}{Nm} Y_m(d)
\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$|m u_m(x)| \leq \frac{d}{N} Y_m(d) \leq Y_m(d)$$

となる。ここで, x は原点が中心で半径 $< N$ の球の中にあるとしている。(そうすれば $0 < d < N$ が成り立つ。) さらに

$$|u_m(x)| \leq \frac{1}{Nm} d Y_m(d) = \frac{1}{Nm} \frac{C_m(d)}{d^{t_m - 1}}$$

だから,補題を用いて,

$$|D_i u_m(x)| \leq \frac{t_m}{Nm} e \frac{C_m(d)}{d^{t_m}} \leq e \frac{C_m(d)}{d^{t_m}} = e Y_m(d)$$

が分かる。こうして帰納法が進み, $u \ll Y$ が証明された。

次は$Y = \sum_{m\geq 1} Y_m(d) t^m$ と $u(t,x) = \sum_{m\geq 1} u_m(x) t^m$ の収束について調べる。

十分小さい $d_0 > 0$ を一つ選んで固定する。 そうすると,ある $T > 0$ に対して級数 $\sum_{m\geq 1} Y_m(d_0) T^m$ が収束することが陰関数定理より分かる。

$M \geq g + 2$ の場合について調べよう。このとき $t_m = m + g - M + 1\,(m \geq M)$ であり,

$$\infty > \sum_{m\geq M} Y_m(d_0) T^m = \sum_{m\geq M} \frac{C_m(d_0)}{d_0^{m+g-M+1}} T^m = \frac{1}{d_0^{g-M+1}} \sum_{m\geq M} C_m(d_0) \left(\frac{T}{d_0}\right)^m$$

である。もし $|t/d| < |T/d_0|$, $0 < d \leq d_0$ ならば,

$$\begin{aligned}
u \;&\ll\; Y = \sum_{m\geq 1} Y_m(d) t^m \\
&= \sum_{1\leq m\leq M-1} Y_m(d) t^m + \sum_{m\geq M} \frac{C_m(d)}{d^{m+g-M+1}} t^m \\
&= \sum_{1\leq m\leq M-1} Y_m(d) t^m + \frac{1}{d^{g-M+1}} \sum_{m\geq M} C_m(d) \left(\frac{t}{d}\right)^m 。\\
|u| \;&\leq\; \sum_{1\leq m\leq M-1} Y_m(d) |t|^m + \frac{1}{d^{g-M+1}} \sum_{m\geq M} C_m(d_0) \left(\frac{T}{d_0}\right)^m < \infty。
\end{aligned}$$

よって,原点に十分近い x に対して, 正定数 C が存在して $u(t,x)$ は $|t| < Cd(x)$ で正則となる。($C = |T/d_0|$ と取ればよい。)

次に $M < g+2$ の場合を調べる。このとき $t_{\ell M+k} = \ell(g+2)+k-1 \quad (l \geq 1,\, 0 \leq k \leq M-1)$ であり,

$$\begin{aligned}\infty > \sum_{m\geq M} Y_m(d_0)T^m &= \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{C_{\ell M+k}(d_0)}{d_0^{\ell(g+2)+k-1}}T^{\ell M+k} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1}\frac{T^k}{d_0^{k-1}}\sum_{\ell=1}^{\infty}C_{\ell M+k}(d_0)\left(\frac{T^M}{d_0^{g+2}}\right)^{\ell}。\end{aligned}$$

よってもし $|t^M/d^{g+2}| < |T^M/d_0^{g+2}|$, $0 < d \leq d_0$ ならば,

$$\begin{aligned}u &\ll Y \\ &= \sum_{m\geq 1} Y_m(d)t^m \\ &= \sum_{1\leq m\leq M-1} Y_m(d)t^m + \sum_{k=0}^{M-1}\frac{t^k}{d^{k-1}}\sum_{\ell=1}^{\infty}C_{\ell M+k}(d)\left(\frac{t^M}{d^{g+2}}\right)^{\ell}。\\ |u| &\leq \sum_{1\leq m\leq M-1} Y_m(d)|t|^m + \sum_{k=0}^{M-1}\frac{|t|^k}{d^{k-1}}\sum_{\ell=1}^{\infty}C_{\ell M+k}(d_0)\left(\frac{T^M}{d_0^{g+2}}\right)^{\ell} < \infty。\end{aligned}$$

よって原点に十分近い x に対して正定数C が存在して $u(t,x)$ は $|t^M| < Cd(x)^{g+2}$ で正則となる。

これで主定理の証明が終わった。

§3. 付録 1

イントロダクションの評価 (6) の,大阿久俊則による証明を与える。大阿久先生, どうもありがとうございました。

命題 2 $\mathbf{C}_x^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, の原点の近傍 Ω で定義された正則関数$f(x)$ を考える。原点において $f(x)$ はちょうどg位のゼロを持つとする($g \in \mathbf{N}^*$)。$V = \{x \in \Omega;\, f(x) = 0\}$ と置き, $d(x)$ で点 $x \in \Omega$ から V までの距離を表わす。

このとき, 原点の近傍 $\Omega' \subset \Omega$ と正定数 $C > 0$ が存在して,

$$|f(x)| \geq Cd(x)^g,\ x \in \Omega'。$$

証明 $f(x)$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{|\alpha|\geq g} f_\alpha x^\alpha$ とする。$f_g(x) = \sum_{|\alpha|=g} f_\alpha x^\alpha$ と置くと, これは0でない斉次多項式である。 必要なら適当な線型座標変換を行って, $f_{(g,0,\ldots,0)} \neq 0$ と仮定してよい。Weierstrass の予備定理により, $f(x)$ は次の形に書ける:

$$f(x) = c(x)(x_1^g + a_1(x')x_1^{g-1} + \cdots + a_g(x')), \quad c(0) \neq 0,\, a_1(0') = \cdots = a_g(0') = 0。$$

ここで $c(x)$ は$\mathbf{C}^n$ の原点0の近傍の正則関数で, 各 $a_i(x')\,(i=1,2,\ldots,g)$ は$\mathbf{C}^{n-1}_{x'}$, $x'=(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ の原点 $0'$ の近傍の正則関数である。よって, 関数 $\varphi_1(x'),\ldots,\varphi_g(x')$ (正則とは限らない) が存在して

$$f(x)=c(x)\prod_{j=1}^{g}(x_1-\varphi_j(x')),\quad \varphi_1(0')=\cdots=\varphi_g(0')=0.$$

が成り立つ。

もし x が原点に十分近ければ

$$\begin{aligned}|f(x)| &\ge \frac{1}{2}|c(0)|\prod_{j=1}^{g}|x_1-\varphi_j(x')|\\ &\ge \frac{1}{2}|c(0)|d(x)^g。\end{aligned}$$ □

この種の評価は実解析的カテゴリでは成立しない。反例を与えよう。

$f(x_1,x_2)=-x_1^3+x_2^2$, $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$, と置く。f は $(0,0)$ で2 位のゼロを持つ。$V^{\mathbf{R}}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;\ f(x_1,x_2)=0\}$ と置く。もし $d>0$ ならば $V^{\mathbf{R}}$ から点$(-d,0)$ までの距離はd である。（これは $(0,0)\in V$ から$(-d,0)$ までの距離である。）$f(-d,0)=d^3$ に注意しよう。

別に矛盾が生じているわけではない。$V^{\mathbf{C}}=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2;\ f(z_1,z_2)=0\}$ には$(-d,0)$ にごく近い点が存在する。そのような点は例えば$V^{\mathbf{C}}$ と $\mathbf{R}_{x_1}\times i\mathbf{R}_{y_2}\subset\mathbf{C}^2_{(x_1+iy_1,x_2+iy_2)}=\mathbf{C}^2_{(z_1,z_2)}$ の共通部分の上にある。実際, 方程式 $f(x_1,iy_2)=-x_1^3-y_2^2=0$ は$\mathbf{R}^2_{(x_1,y_2)}\ni(-d,0)$ 内に曲線を定め, もし $d>0$ が十分小さければ, この曲線は点 $(-d,0)$ に非常に近い。

実解析関数の下からの評価については[5] を見るとよい。

§4. 付録2

動機付けを説明するために, 一つの例について述べる。$(t,x)\in\mathbf{C}^2$ において

$$\begin{cases}\{tD_t-(2-x^g)\}u(t,x)=ta(x)+(D_xu)^2,\\ u(0,x)\equiv 0\end{cases}$$

について考察する。

$u(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(x)t^m$ とおいて漸化式を立てる。簡単な計算で, $m\ge 2$ のとき各 $u_m(x)$ は $x=0$ に極を持ち, その位数は, m が偶数のとき $g+\dfrac{g+2}{2}(m-2)=-2+\dfrac{g+2}{2}m$ であること, m が奇数のとき $-1-\dfrac{g+2}{2}+\dfrac{g+2}{2}m$ であることが分かる。つまり

$$極の位数\sim\frac{g+2}{2}m$$

である。このことより, $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m$ は $|t| < \mathrm{const}|x|^{\frac{q+2}{2}}$ で収束すると予想される。実際これが正しいことが陰関数定理で証明される。

この講究録に書いたもう一つの論説や [7] では線型高階の場合を調べている。これらの問題意識を理解するには上と同じような考察が役立つ。線型の場合, 形式解は表立って用いてはいないが, それは証明の都合であって, 舞台裏では形式解の考察が動機付けとなっている。

参考文献

[1] Gérard R. and Tahara H., Holomorphic and Singular Solutions of Nonlinear Singular First Order Partial Differential Equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **26**(1990), 979-1000.

[2] Gérard R. and Tahara H., *Singular Nonlinear Partial Differential Equations*, Vieweg, 1996.

[3] Hille E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley and Sons, 1976.

[4] Kimura T., *Ordinary differential equations*, Iwanami Shoten, 1977 (in Japanese).

[5] Lojasiewicz S., Sur le problème de la division, *Studia Math.*, **18**(1959), 87-136.

[6] Yamane H., Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **33(5)**(1997).

[7] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, *to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.*